Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 15, pp. 1419–1422. Pergamon Press 1972. Printed in Great Britain

SHORTER COMMUNICATIONS

DIE KRITERIELLE GLEICHUNG DES WARMEAUSTAUSCHES IN REKUPERATOREN

P. PANA
Technischer Rat beim Forschungsinstitut fur Lebensmittelindustrie, Bucharest, Rumania
und
H. THEIL
Technische Hochschule, Facultatea de Mecanica, Timisoara, Rumania

(*Received* 22 *May* 1970 *and in revised form* 30 *May* 1971)

BEZEICHNUNGEN

F_0, Wärmeaustauschfläche des Rekuperators;
k, Wärmedurchgangszahl;
Q, Wärmefluss;
t, Temperatur;
W, Wärmewert;
γ, Verhältnisfaktor der Temperatureinheit;
Δt_m, Mittlere Temperaturdifferenz zwischen beiden Wärmeträgern;
$(\Delta t_m)_G$, Mittlere Temperaturdifferenz bei Gegenstrom;
ε, Korrekturfaktor der mittleren Temperaturdifferenz;
$\varkappa$, $\dfrac{kF_0}{W}$—Dimensionslose Kennzahl;
λ, Verhältnisfaktor der Längeneinheit;
μ, $\dfrac{W_1}{W_2}$—Dimensionslose Kennzahl;
ϑ, Temperaturdifferenz;
ϕ, $\dfrac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2}$—Dimensionslose Kennzahl;
ω, Verhältnisfaktor der Wärmeflusseinheit.

Obere Indizes
$'$, Eintrittsgrösse;
$''$, Austrittsgrösse.

Untere Indizes
1, bezieht sich auf Wärmeträger 1;
2, bezieht sich auf Wärmeträger 2.

BEI DER Berechnung von Rekuperatoren treten die Grössen Q, F_0, k, W_1, W_2, t'_1, t'_2, t''_1 und t''_2 auf. Dabei werden folgende Beziehungen benützt:
—die Wärmeaustauschgleichung zwischen beiden Stoffen, die wir in allgemeiner Form schreiben wollen

$$Q = \varphi_1(k, F_0, W_1, W_2, t'_1, t'_2, t''_1, t''_2) \tag{1}$$

—die Wärmebilanzgleichung des Wärmeträgers 1

$$Q = W_1(t'_1 - t''_1) \tag{2}$$

—die Wärmebilanzgleichung des Wärmeträgers 2

$$Q = W_2(t''_2 - t'_2). \tag{3}$$

Es treten also 9 Rechengrössen auf, zwischen denen drei Beziehungen existieren. Bei praktischen Berechnungen müssen folglich sechs Grössen bekannt sein, um die restlichen drei bestimmen zu können.

Die oben angegebenen Beziehungen gelten für den Beharrungszustand bei temperaturunabhängiger Wärmedurchgangszahl und temperaturunabhängigen spezifischen Wärmen.

Nimmt man als Ausgangspunkt der Temperaturen, die Temperatur t'_2 an und bezeichnet die so bestimmten Temperaturdifferenzen mit:

$$\vartheta = t - t'_2$$

so gehen die Gleichungen (1), (2) und (3) über in:

$$Q = \varphi_2(k, F_0, W_1, W_2, \vartheta'_1, \vartheta''_1, \vartheta''_2) \tag{4}$$

$$Q = W_1(\vartheta'_1 - \vartheta''_1) \tag{5}$$

$$Q = W_2\vartheta''_2. \tag{6}$$

Die allgemeine Gleichung (4) drückt den physikalischen Vorgang des Wärmeaustausches im Rekuperator aus, welcher von acht dimensionsbehafteten Grössen abhängt. Mit Hilfe von Gleichung (5) und (6) können zwei dieser Grössen eliminiert werden, d.h. dass der Vorgang in Wirklichkeit von nur $8 - 2 = 6$ dimensionsbehafteten Grössen abhängt.

Im internationalen Masssystem z.B. werden diese Grössen durch folgende Dimensionen ausgedrückt:

der Wärmefluss

$$Q\left[\frac{\mathrm{kg.m^2}}{\mathrm{s^3}}\right] \text{ oder } [\mathrm{W}]$$

die Wärmedurchgangszahl

$$k\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^3grd}}\right] \text{ oder } \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2grd}}\right]$$

die Wärmeaustauschfläche $F_0[\mathrm{m^2}]$

die Temperaturdifferenzen $\vartheta'_1, \vartheta''_1, \vartheta''_2\ [{}^0\mathrm{K}]$

die Wärmewerte

$$W_1, W_2\left[\frac{\mathrm{kg.m^2}}{\mathrm{s^3grd}}\right] \text{ oder } \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{grd}}\right].$$

Wie man sieht, lassen sich die Grössen der Gleichung (4) durch die vier Grundeinheiten des internationalen Masssystems (m, kg, s, grd), oder aber auch durch die drei unabhängigen Masseinheiten W, m, grd, ausdrücken. Die letztere Ausdrucksmöglichkeit lässt sich dadurch erklären, dass Gleichung (4) einen stationären Wärmeaustausch ausdrückt, bei welchem die Zeit als solche hicht gesondert in Erscheinung tritt, sondern nur in den Grössen Q, W_1 und W_2 enthalten ist.

Nach dem von Buckingham aufgestellten, sogenannten Π Theorem [1]–[5] besitzt ein physikalischer Vorgang der von m dimensionsbehafteten Grössen abhängt, die durch n Grundeinheiten ausgedrückt werden können, m–n dimensionlose Grössen oder Kennzahlen. Der physikalische Vorgang kann in allgemeiner Form durch eine Beziehung zwischen diesen dimensionslosen Kennzahlen ausgedrückt werden, welche die kriterielle Gleichung des Vorgangs darstellt.

Im vorliegenden Falle haben wir $m = 6$ dimensionsbehaftete Grössen, die durch $n = 3$ Grundeinheiten ausgedrückt werden. Der Wärmeaustauschvorgang im Rekuperator lässt sich also durch $m-n=6-3=3$ dimensionslose Kennzahlen darstellen. Diese Kennzahlen können auf Grund der Dimensionsanalyse gefunden werden, wenn man die Grössen von denen der Vorgang abhängt mit Sicherheit bestimmen kann, ohne dass man die Funktion φ_2 aus Gleichung (4) kennt. Da diese Grössen im Falle der Rekuperatoren bekannt sind, kann man die dimensionslosen Kennzahlen mit Hilfe der algebraischen Methode [5] bestimmen.

Gleichung (4) behält ihre Gültigkeit auch im Falle in dem die dort auftretenden Grössen in einem beliebigen anderen Masssystem ausgedrückt werden, da diese nicht von den verwendeten Masseinheiten abhängen. Wir wollen nun an Stelle von W, m, grd neue Masseinheiten annehmen und zwar die Eigenmasse der Grössen Q, F_0 und ϑ'_1 [6]. Da jede dieser neuen Einheiten ein Vielfaches der alten Einheit darstellt sind die neuen Einheiten:

$$\frac{\mathrm{m}}{\lambda},\ \frac{\mathrm{W}}{\omega},\ \frac{\mathrm{grd}}{\gamma}$$

hier bedeuten λ, ω und γ die jeweiligen Verhältnisse zwischen der alten und neuen Masseinheit.

Um die in Gleichung (4) auftretenden Grössen im neuen Masssystem auszudrücken, muss man die Grundgrössen (Länge, Wärmefluss und Temperaturdifferenz) mit den Verhältnisfaktoren λ, ω, γ multiplizieren. Man erhält in diesem Fall aus Gleichung (4):

$$Q\omega = \varphi_2\left(k\frac{\omega}{\lambda^2\gamma}, F_0\lambda^2, W_1\frac{\omega}{\gamma}, W_2\frac{\omega}{\gamma}, \vartheta'_1\gamma, \vartheta''_1\gamma, \vartheta''_2\gamma\right). \tag{4a}$$

Der Zahlenwert der Bezugsgrössen Q, F_0, ϑ'_1 hat im neuen Masssystem den Wert eins:

$$Q\omega = 1 \tag{7}$$

$$F_0\lambda^2 = 1 \tag{8}$$

$$\vartheta'_1\gamma = 1. \tag{9}$$

Eliminiert man aus den vier Gleichungen (4a), (7), (8) und (9) die Verhältnisfaktoren ω, λ, γ so folgt:

$$1 = \varphi_2\left(k.F_0\frac{\vartheta'_1}{Q}, 1, W_1\frac{\vartheta'_1}{Q}, W_2\frac{\vartheta'_1}{Q}, 1, \frac{\vartheta''_1}{\vartheta'_1}, \frac{\vartheta''_2}{\vartheta'_1}\right). \tag{10}$$

Aus Gleichung (5) und (6) folgt:

$$\vartheta''_2 = \frac{W_1}{W_2}(\vartheta'_1 - \vartheta''_1). \tag{11}$$

Es gilt auch:

$$\vartheta''_1 = \vartheta'_1 - (\vartheta'_1 - \vartheta''_1). \tag{12}$$

Berücksichtigt man die Ausdrücke (5), (11) und (12) so erhält man aus (10):

$$1 = \varphi_2\left[\frac{kF_0}{W_1}\frac{\vartheta'_1}{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}, 1, \frac{\vartheta'_1}{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}, \frac{W_2}{W_1}\frac{\vartheta'_1}{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}, 1, \left(1 - \frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{\vartheta'_1}\right), \frac{W_1}{W_2}\frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{\vartheta'_1}\right] \tag{13}$$

oder

$$\varphi_2\left(\frac{kF_0}{W_1}, \frac{W_1}{W_2}, \frac{\vartheta'_1 - \vartheta''_1}{\vartheta'_1}\right). \tag{14}$$

Dieser Ausdruck enthält die dimensionslosen Grössen:

$$\phi = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1'} = \frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'}$$

$$\varkappa_1 = \frac{kF_0}{W_1}$$

$$\mu = \frac{W_1}{W_2}.$$

Gleichung (14) stellt die kriterielle Gleichung des Wärmeaustausches zwischen den zwei Wärmeträgern im Rekuperator dar und drückt den Zusammenhang zwischen den drei dimensionslosen Grössen des Vorganges: ϕ, $\varkappa$ und μ aus. Diese drei Kennzahlen ersetzen also die sechs dimensionsbehaften Grössen des Warmeaustauschvorganges im Rekuperator.

Durch Kombination der gefundenen Kennzahlen. erhält man neue Kennzahlen, z.B.

$$\varkappa_2 = \mu \,.\, \varkappa_1 = \frac{kF_0}{W_2}.$$

Bei Verwendung dieser Kennzahl kann man die kriterielle Gleichung eines Rekuperators auch in der Form:

$$\varphi_3\left(\frac{kF_0}{W_1}, \frac{kF_0}{W_2}, \phi\right) = 0 \qquad (15)$$

schreiben.

Prof. Bošnjaković gelangt in seiner grundlegenden Arbeit. über die einheitliche Berechnung von Rekuperatoren [7]. zu Gleichung (14)

$$\phi = \phi(\mu, \varkappa)$$

denen Durchströmungsarten der Arbeitsmedien im Wärmeaustausches zwischen den beiden Wärmeträgern. Verschiedenen Durchströmungsarten der Arbeitsmedien in Wärmeübertrager, entsprechen verschiedene mathematische Formen dieser Funktion. In jedem Falle hängt aber die Betriebscharakteristik ϕ nur von den beiden Kenngrössen μ und $\varkappa$ ab. Zu dieser Tatsache gelangt man auch, wie aus den obigen Darlegungen hervorgeht, auf Grund der Dimensionsanalyse, die zeigt, dass der Wärmeaustausch in einem Rekuperator, beliebiger Bauart durch nur drei unabhängige Kenngrössen bestimmt ist, und dass die Beziehung die zwischen diesen drei Grössen besteht die kriterielle Gleichung des Wärmeaustausches im Rekuperator darstellt.

Im überwiegenden Teil des Fachschriftums wird der Wärmestrom im Rekuperator nicht auf Grund der besprochenen kriteriellen Gleichung. sondern mit Hilfe der mittleren Temperaturdifferenz ausgedrückt:

$$Q = kF_0\Delta t_m. \qquad (16)$$

Dieses Verfahren entspricht beim Entwurf eines Wärmeaustauschers, wenn die Ein- und Austrittstemperaturen bekannt sind und die Wärmeaustauschfläche gesucht wird. Dabei kann man aber die mittlere Temperaturdifferenz nur für die einfachen, im Gleich- und Gegenstrom gebauten Apparate leicht berechnen. Für andere Durchströmungsarten wird bekanntlich die für Gegenstrom berechnete Temperaturdifferenz mit einem Korrekturfaktor ε berichtigt.

$$\Delta t_m = \varepsilon(\Delta t_m)_G. \qquad (17)$$

Der Korrekturfaktor ε ist nur für einige Rekuperatorbauarten zu finden. Er wird graphisch, in Abhängigkeit von zwei Temperaturdifferenzverhältnissen, dargestellt [8]. Auch in diesem Fall verwendet man also dimensionslose Kennzahlen, behält aber Gleichung (16) die viel umständlicher zu handhaben ist, als die Betriebscharakteristik ϕ, welche den physikalischen Vorgang in natürlicher Weise erfasst.

Soll das Verhalten eines Wärmeaustausches für verschiedene Betriebszustände berechnet werden, so führt Gleichung (16) zu langwierigen Iterationsrechnungen. Um diese abzukürzen, werden Diagramme benützt [9] auf Grund derer. man die gesuchte Temperatur. unter Einführung neuer Kenngrössen berechnen kann. Diese Diagramme sind aber auch nur für einige häufig anzutreffende Strömungsarten dargestellt. Zur Bestimmung des Betriebsverhaltens von Wärmeaustauschern auf Grund von Gleichungen (16) sind also für jede Bauart zwei verschiedene Diagramme nötig.

Benützt man aber die Betriebscharakteristik ϕ so kann man sowohl die Entwurfsprobleme als auch Fragen des Betriebsverhaltens von Wärmeaustauschern, einheitlich und einfach lösen [7]. Auf Grund dieser Methode wird auch das Problem mehrerer, parallel oder in Serie geschalteter Rekuperatoren behandelt und es wird eine Beziehung zwischen den Betriebscharakteristiken der Einzelapparate und der Gesamtbetriebscharakteristik aufgestellt [7]. Ein noch so komplizierter Wärmeaustauscher kann als Zusammenbau von einfachen Einzelapparaten angesehen werden. deren Betriebscharakteristik ϕ bekannt ist und folglich ist es auf diese Art möglich eine viel grössere Anzahl praktischer Fälle zu lösen, als auf Grund der mittleren Temperaturdifferenz, die der praktisch arbeitende Fachmann nur für eine sehr begrenzte Art von Wärmeaustauschern berechnen kann.

Da die Betriebscharakteristik auch als Wirkungsgrad des Wärmeaustauschers aufgefasst werden kann, ist es möglich mit Hilfe dieser Grösse das Verhalten des Rekuperators unter verschiedenen Betriebsbedingungen zu verfolgen. Graphoanalytische Verfahren gestatten, an Hand der ϕ Funktion, die Bestimmung der Temperaturen in jedwelchem Punkt der Wärmeaustauschfläche, sowie die Einführung von Wirtschaftlichkeitskriterien beim Entwurf von Rekuperatoren. Probleme die mit anderen Methoden nicht gelöst werden können [7].

Die Gleichung $F(\phi, \mu, \varkappa) = 0$, für den Wärmeaustauschvorgang im Rekuperator, entspricht der Gleichung $F(Nu, Re, Pr, Gr) = 0$ des konvektiven Wärmeübergangs. Die Anwendung der Ähnlichkeitstheorie, beim Studium der konvektiven Wärmeübertragung, durch Nusselt, ermöglichte die Verallgemeinerung der experimentellen Ergebnisse auf diesem Gebiet.

Die Anwendung derselben Methode beim Studium der Wärmeaustauscher durch Prof. Bošnjaković hat dieselben Vorteile und erklärt die vielseitigen Möglichkeiten die sich beim Gebrauch der Betriebscharakteristik ϕ ergeben. Diese Vorteile gehen aus der angeführten Arbeit [7], welche der Berechnung von Wärmeaustauschern neue Möglichkeiten eröffnet, klar hervor und beweisen die Überlegenheit der Berechnungsmethode auf Grund der kriteriellen Gleichung, gegenüber der Methode die sich auf die mittlere Temperaturdifferenz stützt, welche auch heute, trotz der ihr gesetzten Grenzen noch sehr verbreitet ist.

LITERATUR

1. E. Buckingham, On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations. *Phys. Rev.* **4**, 345 (1914).
2. E. Gröber und U. Grigull, Die *Grundgesetze der Wärmeübertragung*, S. 167. Springer Verlag, Berlin (1957).
3. K. D. Voskresenski, *Culegere de Probleme de Transmiterea Căldurii.* Editura Energetică București (1953).
4. M. A. Michejew, *Grundlagen der Wärmeübertragung*, V.E.B. Verlag Technik, Berlin.
5. W. H. McAdams, *Heat Transmission.* New York (1954).
6. M. Weber, Das Ähnlichkeitsprinzip der Physik und seine Bedeutung für das Modellversuchswesen, *Forsch. Ing. Wes. Bd.* **11**, 49–58 (1940).
7. F. Bošnjaković, M. Vilicic und B. Slipcevic, Einheitliche Berechnung von Rekuperatoren, *VDI-Forsch.* 432 (1951).
8. R. A. Bowman, A. C. Mueller und W. M. Nagle, Mean Temperature in Desing, *Trans. A.S.M.E.* **62**, 283–94 (1940).
9. H. Kühne, Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Ein- und Austrittstemperaturen von Wärmeaustauschern, *Haustechn. Rdsch.* **49** (7/8), 61–66 (1944).

Int J. Heat Mass Transfer. Vol. 15, pp. 1422–1426. Pergamon Press 1972. Printed in Great Britain

RADIATIVE TRANSFER THROUGH A SCATTERING, ABSORBING LAYER*

S. H. CHAN

Department of Mechanical Engineering, New York University, Bronx, New York 10453, U.S.A.

(*Received* 18 *October* 1971 *and in revised form* 18 *January* 1972)

NOMENCLATURE

- a, absorption coefficient;
- I, forward radiative flux;
- I_i, incident flux at the front surface;
- J, backward radiative flux;
- L, thickness of layer;
- n, index of refraction;
- s, scattering coefficient;
- x, distance from front surface;
- α, absorptance of layer;
- β, optical constant equal to $[a/(a + 2s)]^{\frac{1}{2}}$;
- γ, extinction coefficient equal to $(a + s)$;
- ρ, reflectance of layer;
- σ, optical constant equal to $[a(a + 2s)]^{\frac{1}{2}}$;
- τ, transmittance of layer.

Subscripts
- d, diffuse;
- i, internal surface;
- o, external surface;
- s, specular.

* This work was partially supported by the National Science Foundation under NSF Grant GK-24972.

INTRODUCTION

The radiative transfer through a scattering, absorbing dielectric sheet has been treated analytically by means of the two-flux model due to the simplicity of the model [1, 2]. This two-flux model assumes the total radiant flux within the layer to be composed of two fluxes with one flux, I, in the direction of positive x-axis and the other flux, J, in the negative x-axis direction. Writing an energy balance on an infinitesimal layer results in a set of two simultaneous differential equations. With appropriate boundary conditions, these two equations can be solved to yield solutions for I and J. Then the transmittance τ, absorptance